Københavns Universitet. Økonomisk Institut

2. årsprøve 2016 S-2DM ex ret

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Mandag den 6. juni 2016

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert $a \in \mathbf{R}$ betragter vi tredjegradspolynomiet $P_a : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P_a(z) = z^3 + (a^2+7)z^2 + (7a^2+12)z + 12a^2.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + (a^2+7)\frac{d^2x}{dt^2} + (7a^2+12)\frac{dx}{dt} + 12a^2x = 0,$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + 8\frac{d^2x}{dt^2} + 19\frac{dx}{dt} + 12x = 12e^{-t}.$$

(1) Vis, at tallet $z = -3$ er rod i polynomiet P_a. Bestem dernæst samtlige rødder i polynomiet P_a.

Løsning. Ved indsættelse ser man, at $P_a(-3) = 0$, og ved polynomiers division opnår man, at faktoriseringen

$$\forall\, z \in \mathbf{C} = P_a(z) = (z+3)(z^2 + (a^2+4)z + 4a^2).$$

er opfyldt.

Da

$$z^2+(a^2+4)z+4a^2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-a^2 - 4 \pm (a^2-4)}{2} \Leftrightarrow z = -4 \vee z = -a^2,$$

får vi, at polynomiet P_a har rødderne $z=-3, z=-4$ og $z=-a^2$. Hvis $a \notin \{\pm\sqrt{3}, \pm 2\}$ er der tre simple rødder. I modsat fald er $z = -a^2 = -3$ eller $z = -a^2 = -4$ en dobbeltrod.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$, og bestem de $a \in \mathbf{R}$, hvor $(*)$ er globalt asymptotisk stabil.

Løsning. Vi ser, at

$$x = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-4t} + c_3 e^{-a^2 t}, \quad \text{hvor} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R},$$

dersom $a \notin \{\pm\sqrt{3}, \pm 2\}$. Hvis $a = \pm\sqrt{3}$, får vi, at

$$x = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-4t} + c_3 t e^{-3t}, \quad \text{hvor} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R},$$

og hvis $a = \pm 2$, ser vi, at

$$x = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-4t} + c_3 t e^{-4t}, \quad \text{hvor} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

Heraf aflæser vi, at differentialligningen $(*)$ er globalt asymptotisk stabil, hvis og kun hvis $a \neq 0$.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

Løsning. Vi sætter $a = 1$ i differentialligningen $(*)$ og gætter på en løsning af formen $\hat{x} = Ate^{-t}$. Da er $\hat{x}' = Ae^{-t} - Ate^{-t}, \hat{x}'' = Ate^{-t} - 2Ae^{-t}$ og $\hat{x}''' = 3Ae^{-t} - Ate^{-t}$. Ved indsættelse i differentialligningen $(**)$ finder vi, at $A = 2$. Den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$ er derfor

$$x = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-4t} + c_3 e^{-t} + 2te^{-t}, \quad \text{hvor} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R},$$

For ethvert $b \in \mathbf{R}$ betragter vi den homogene, lineære differentialligning

$$(***) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + b\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + bx = 0,$$

(4) Opstil Routh-Hurwitz matricen A_3 for differentialligningen $(***)$, og bestem de $b \in \mathbf{R}$, for hvilke $(***)$ er globalt asymptotisk stabil.

Løsning. Vi ser umiddelbart, at

$$A_3 = \begin{pmatrix} b & b & 0 \\ 1 & 2b & 0 \\ 0 & b & b \end{pmatrix}.$$

De ledende hovedunderdeterminanter er $D_1 = b, D_2 = 2b^2 - b = (2b-1)b$ og $D_3 = 2b^3 - b^2 = (2b-1)b^2$. Hvis disse alle tre skal være positive, må vi kræve, at $b > \frac{1}{2}$, så differentialligningen $(***)$ er globalt asymptotisk stabil, hvis og kun hvis $b > \frac{1}{2}$.

Opgave 2. Vi betragter mængderne

$$A = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1 \ \wedge \ |z| \in \mathbf{Q}_+\}$$

og

$$B = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 2 \ \wedge \ -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}.$$

(1) Bestem det indre A^O af mængden A.

Løsning. Det indre af A er tomt, så $A^O = \emptyset$.

(2) Bestem randen ∂A af mængden A.

Løsning. Randen af mængden A er

$$\partial A = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

(3) Bestem afslutningen $\overline{A}$ af mængden A.

Løsning. Vi ser, at afslutningen af mængden A er

$$\overline{A} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

(4) Bestem det konvekse hylster $H = \operatorname{conv}(A)$ af mængden A.

Løsning. Det konvekse hylster af mængden A er

$$H = \operatorname{conv}(A) = \overline{A} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

(5) Vis, at mængden B er afsluttet og konveks.

Løsning. Det er klart, at mængden B er afsluttet. Vi ser også, at B er fællesmængden af de tre afsluttede halvrum

$$H_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 2\}, H_2 = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \geq -1\}$$

og

$$H_3 = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \leq 1\},$$

der alle er konvekse. Derfor er mængden B konveks.

(6) Vis, at mængderne H og B kan separeres med en hyperplan i $\mathbf{C}$.

Løsning. I $\mathbf{C}$ er enhver ret linje en hyperplan, og vi ser, at hyperplanen

$$\tilde{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z = 1,5\}$$

separerer de konvekse mængder H og B.

(7) Bestem det konvekse hylster $C = \operatorname{conv}(H \cup B)$ af mængden $H \cup B$.

Løsning. Vi finder, at

$$C = \overline{A} \cup \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0 \,\wedge\, -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}.$$

Opgave 3. Vi betragter 3×3 matricen

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

og vektordifferentialligningerne

$$(i) \quad \frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{og} \quad (ii) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

hvor $x \in \mathbf{R}^3$.

(1) Vis, at vektorerne $v_1 = (0,1,0), v_2 = (-1,0,1)$ og $v_3 = (1,0,1)$ er egenvektorer for matricen A, og bestem de tilhørende egenværdier.

Løsning. Vi ser, at $Av_1 = 2v_1, Av_2 = 9v_2$ og $Av_3 = 11v_3$. Dette viser, at vektorerne v_1, v_2 og v_3 er egenvektorer for matricen A med egenværdierne $2, 9$ og 11.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til vektordifferentialligningen (i).

Løsning. Den fuldstændige løsning til vektordifferentialligningen (i) er

$$x = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{9t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{11t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

(3) Opskriv den tilhørende fundamentalmatrix $\Phi(t)$, og bestem resolventen $R(t,0)$.

Løsning. Vi ser, at

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & -e^{9t} & e^{11t} \\ e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{9t} & e^{11t} \end{pmatrix}.$$

Herefter ser vi, at

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \Big(\Phi(0)\Big)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Endelog finder vi, at

$$R(t,0) = \Phi(t)\Big(\Phi(0)\Big)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -e^{9t} & e^{11t} \\ e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{9t} & e^{11t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{9t} + \frac{1}{2}e^{11t} & 0 & -\frac{1}{2}e^{9t} + \frac{1}{2}e^{11t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ -\frac{1}{2}e^{9t} + \frac{1}{2}e^{11t} & 0 & \frac{1}{2}e^{9t} + \frac{1}{2}e^{11t} \end{pmatrix}.$$

(4) Bestem den fuldstændige løsning til vektordifferentialligningen (ii).

Løsning. Matricen A er regulær, thi den har determinanten 198. Desuden finder vi, at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{99} & 0 & -\frac{1}{99} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{99} & 0 & \frac{10}{99} \end{pmatrix}.$$

En konstant løsning til vektordifferentialligningen (ii) er givet ved

$$k = -A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{99} \\ -1 \\ -\frac{49}{99} \end{pmatrix}.$$

Den fuldstændige løsning til vektordifferentialligningen (ii) er derfor

$$x = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{9t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{11t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{99} \\ -1 \\ -\frac{49}{99} \end{pmatrix},$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^1 \left(2u^2 - x + x^2\right) dt.$$

Vi skal løse det optimale kontrolproblem at minimere $I(x)$, idet $\dot{x} = f(t, x, u) = 2u - x$, $x(0) = \frac{1}{3}$ og $x(1) = \frac{1}{3} + e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}}$.

(1) Opskriv Hamiltonfunktionen $H = H(t, x, u, p)$ for dette optimale kontrolproblem.

Løsning. Vi finder, at

$$H = H(t, x, u, p) = 2u^2 - x + x^2 + p(2u - x) = 2u^2 - x + x^2 + 2pu - px.$$

(2) Vis, at dette optimale kontrolproblem er et minimumsproblem.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} = -1 + 2x - p \text{ og } \frac{\partial H}{\partial u} = 4u + 2p,$$

hvor funktionen $p = p(t)$ er den adjungerede funktion, og dermed er

$$H''(x, u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Denne Hessematrix er åbenbart positiv definit, så funktionen $H = H(x, u)$ er strengt konveks. Det givne kontrolproblem er altså et minimumsproblem.

(3) Bestem det optimale par (x^*, u^*), som løser problemet.

Løsning. Idet

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} = -1 + 2x - p \text{ og } \frac{\partial H}{\partial u} = 4u + 2p = 0,$$

får vi, at $p = -2u$ og $\dot{p} = p - 2x + 1$, hvoraf vi ser, at $-2\dot{u} = -2u - 2x + 1$. Da $\dot{x} = 2u - x$, er $2u = \dot{x} + x$, så $2\dot{u} = \ddot{x} + \dot{x}$. Dette medfører, at

$$-2\dot{u} = -2u - 2x + 1 \Leftrightarrow 2\dot{u} = 2u + 2x - 1 \Leftrightarrow \ddot{x} + \dot{x} = \dot{x} + x + 2x - 1,$$

så vi opnår, at

$$\ddot{x} - 3x = -1.$$

Det karakteristiske polynomium for den tilhørende homogene differentialligning $\ddot{x} - 3x = 0$ er $P(\lambda) = \lambda^2 - 3$, hvoraf vi finder, at de karakteristiske rødder er $\lambda_1 = \sqrt{3}$ og $\lambda_2 = -\sqrt{3}$. En konstant løsning til den inhomogene differentialligning ses at være $\hat{x} = \frac{1}{3}$. Den fuldstændige løsning er derfor

$$x = Ae^{\sqrt{3}t} + Be^{-\sqrt{3}t} + \frac{1}{3}, \quad \text{hvor} \quad A, B \in \mathbf{R}.$$

Da $x(0) = \frac{1}{3}$, får vi, at $B = -A$, så

$$x = A\Big(e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t}\Big) + \frac{1}{3}, \quad \text{hvor} \quad A \in \mathbf{R}.$$

Da $x(1) = \frac{1}{3} + e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}}$, er $A = 1$. Dette viser, at

$$x^* = x^*(t) = e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t} + \frac{1}{3},$$

og dermed er

$$\dot{x}^* = \dot{x}^*(t) = \sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} + \sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t}.$$

Nu er

$$\dot{x}^* + x^* = (\sqrt{3} + 1)e^{\sqrt{3}t} + (\sqrt{3} - 1)e^{-\sqrt{3}t} + \frac{1}{3},$$

så

$$u^* = u^*(t) = \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) e^{\sqrt{3}t} + \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) e^{-\sqrt{3}t} + \frac{1}{6}.$$